

ГЛАВА 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕХАНИКЕ

5.1. Метод конечных элементов

5.2. Метод граничных элементов

5.3. Метод дискретных элементов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Рассмотренные выше аналитические задачи были решены применительно к одиночным протяженным выработкам, не испытывающим влияния других выработок или выработанного пространства лавы. В том случае, если такое влияние имеется, решение намного усложняется, получение достаточно компактных зависимостей становится невозможным. Например, плоское сечение подготовительной выработки арочной формы, сопрягающейся с выработанным пространством лавы, представляет собой плоскость, ослабленную вырезом достаточно сложной формы (рис. 5.1).



Рис. 5.1. Плоское сечение выработки, сопряженной с выработанным пространством лавы

Наличие области обрушенных пород создает дополнительную неоднородность рассматриваемой среды. Получить решение задачи о распределении напряжений и деформаций методами, рассмотренными выше, для приведенной области, даже в предположении, что среда деформируется только упруго, не представляется возможным. В инженерной практике для учета перечисленных выше факторов, которые не удастся ввести в расчетную схему, используют различные коэффициенты, полученные, как правило, эмпирическим путем на основе обобщения натуральных наблюдений или данных лабораторных испытаний. Однако, использование эмпирических коэффициентов, «подправляющих» аналитическое решение, ограничено теми конкретными условиями, в которых проводились наблюдения или эксперимент. Такой подход чреват эффектом «накопления ошибок»: проектировщик выбирает значение нужных ему коэффициентов из некоторого диапазона (иногда довольно широкого), не имея достаточного

основания для выбора именно этих значений. Чем больше коэффициентов нужно ввести, тем больше вероятность того, что получаемая в результате величина отклоняется от своего истинного значения и тем больше величина этого отклонения.

Более точное решение поставленной задачи можно получить, если расчетная схема и метод решения позволяют изначально учесть интересующие исследователя факторы. Широкие возможности открывают в этом плане так называемые численные методы решения, заимствованные из механики твердого деформируемого тела. Наиболее эффективные из них – **метод конечных элементов (МКЭ)** и **метод граничных элементов (МГЭ)**. Другое название последнего - метод граничных интегралов (МГИ). В последние годы появляется всё больше программных продуктов, в основе которых лежит **метод дискретных элементов (МДЭ)**.

Интенсивное их развитие и применение в практике инженерных расчетов стало возможным с развитием и доступностью вычислительной техники. В последние два десятилетия благодаря применению этих методов существенно расширился класс задач, решаемых в механике горных пород.

5.1. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов заимствован из строительной механики. Его суть заключается в следующем.

Из бесконечного массива выделяется некоторая интересующая нас область, например, в окрестности подлежащей изучению выработки (рис. 5.2,а). Для простоты изложения рассмотрим прямоугольную выработку.

Действие отброшенной части массива заменяем усилиями, приложенными на границе области:

$$\sigma_y = -\gamma H; \quad \sigma_x = -\lambda \gamma H.$$

Вся исследуемая область делится на подобласти, достаточно малые, чтобы считать внутри их среду однородной и изотропной (рис.5.2,б). Поэтому свойства среды в каждой из подобластей описываются постоянными (для данной подобласти) характеристиками: E , μ , γ . Эти подобласти называются **конечными элементами**. Они взаимодействуют друг с другом в узлах через **узловые силы** - F и **узловые перемещения** δ .

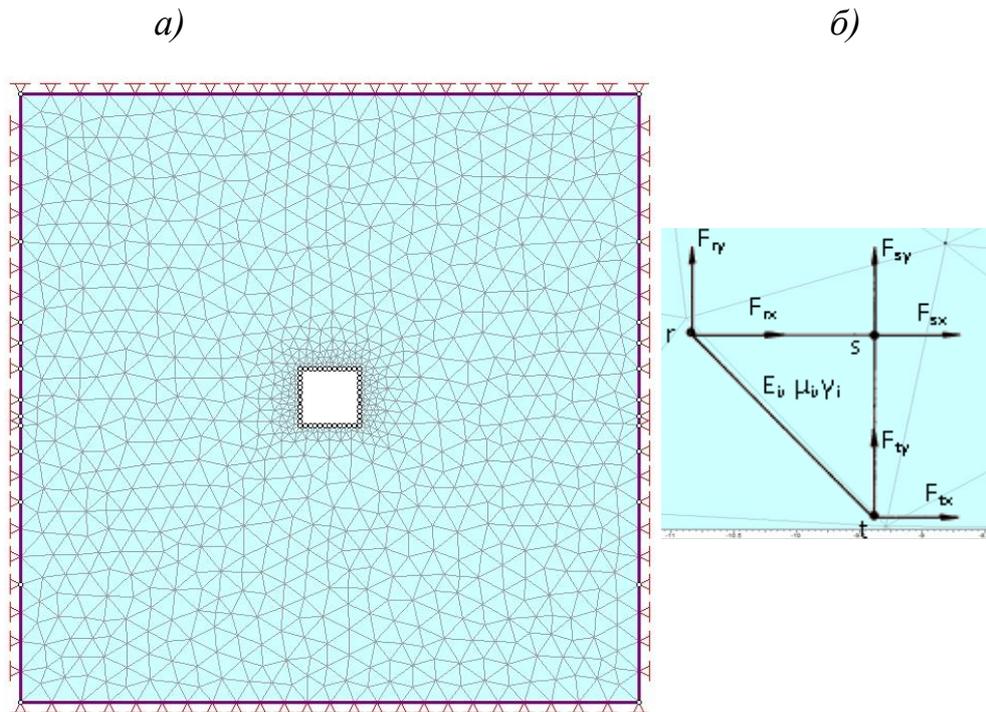


Рис. 5.2. Конечноэлементная аппроксимация исследуемой области (а) и ее произвольный i -ый элемент (б)

В таком виде исследуемая область подобна некоторой стержневой системе. Сообщая одному узлу усилие или перемещение, получим отклик во всей системе, в каждом из ее узлов.

Однако, основная идея метода заключается в том, что перемещения внутренних точек каждого элемента (вектор $\vec{\delta}$ с компонентами (проекциями) $\{\delta\} = \{U, V\}$) связываются с перемещениями узлов (вектором $\vec{\delta}_e$ с компонентами $\{\delta\}_e = \{\delta_r, \delta_s, \delta_i\} = \{U_r, V_r, U_s, V_s, U_i, V_i\}$) (рис.5.2,а,б). Эта связь выражается некоторой функцией, которая называется **функцией формы**.

$$\{\delta\}_e = \Phi\{\delta\}_e. \quad (5.1)$$

Ее надо подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям на контуре элемента и соблюсти условие неразрывности деформаций. Наиболее просто получить эту функцию для конечного элемента треугольной формы. Именно поэтому чаще всего исследуемую область разбивают на конечные элементы треугольной формы.

Компоненты вектора перемещений произвольной внутренней точки (рис. 5.3) связывают с компонентами вектора перемещений узлов (подробный вывод опускаем):

$$\begin{aligned}
 u_e &= \frac{1}{2S} \left[(a_r + b_r x + c_r y) u_r + (a_s + b_s x + c_s y) u_s + (a_t + b_t x + c_t y) u_t \right], \\
 v_e &= \frac{1}{2S} \left[(a_r + b_r x + c_r y) v_r + (a_s + b_s x + c_s y) v_s + (a_t + b_t x + c_t y) v_t \right],
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_r &= X_s Y_t - X_t Y_s, & b_r &= Y_s - Y_t, & c_r &= X_t - X_s. \\
 a_s &= X_t Y_r - X_r Y_t, & b_s &= Y_t - Y_r, & c_s &= X_r - X_t. \\
 a_t &= X_r Y_s - X_s Y_r, & b_t &= Y_r - Y_s, & c_t &= X_s - X_r.
 \end{aligned}$$

Здесь - $X_s, Y_s, X_t, Y_t, X_r, Y_r$ координаты узлов элемента, S - площадь треугольного элемента, определяемая следующей матрицей:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_r & Y_r \\ 1 & X_s & Y_s \\ 1 & X_t & Y_t \end{bmatrix}.$$

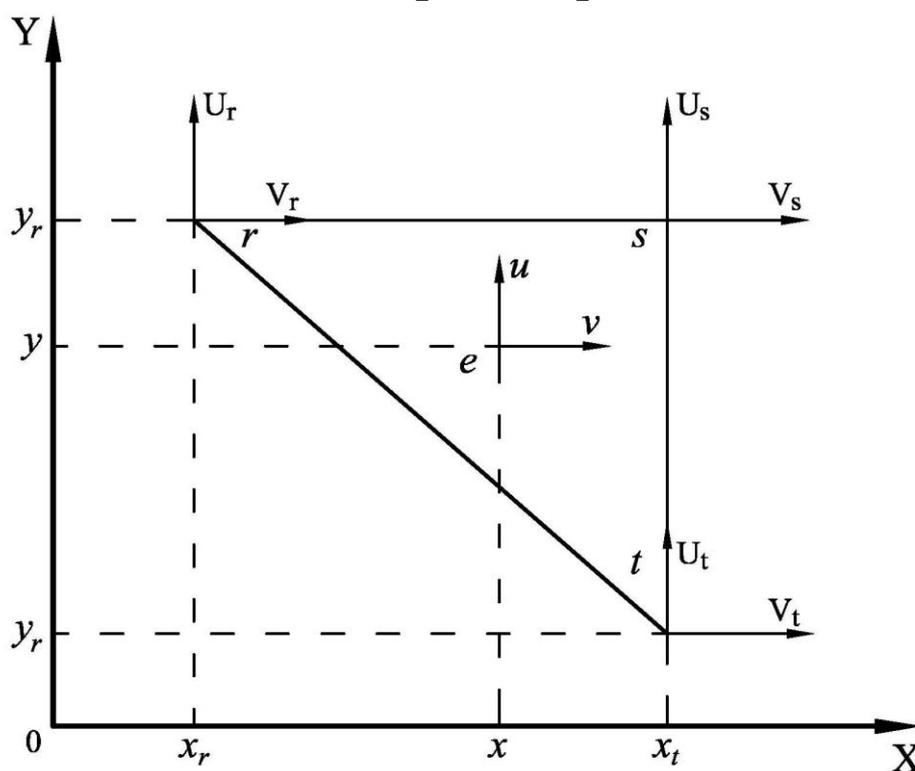


Рис. 5.3. К определению вектора перемещений произвольной внутренней точки элемента

Поскольку мы имеем дело с векторными величинами, все соотношения и далее удобно записать в матричной форме. С вектором перемещений связывают вектор деформаций:

$$\{\varepsilon\} = B\{\delta\}_e, \quad (5.3)$$

где B – координатная матрица. Она определяется следующим образом:

$$B = \frac{2}{2S} \begin{bmatrix} b_r & 0 & b_s & 0 & b_t & 0 \\ 0 & c_r & 0 & c_s & 0 & c_t \\ c_r & b_r & c_s & b_s & c_t & b_t \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Далее, используя матрицу упругости

$$D = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

переходят к напряжениям:

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} = DB^T\{\delta\}_e. \quad (5.6)$$

где B^T – транспонированная матрица B . Последнее равенство – не что иное, как закон Гука в матричном виде.

Поставленная задача будет решена, если будут известны перемещения узлов под действием приложенной нагрузки. А они, конечно, связаны с усилиями в узлах, т.е. с вектором $\{F\}_e$. Эта связь вытекает из условия: работа узловых сил по перемещению узлов должна быть равна работе внутренних сил, т.е. напряжений. Для треугольного элемента это условие дает уравнение:

$$\{F\}_e = [k]_e\{\delta\}_e. \quad (5.7)$$

Здесь $[k]_e$ – так называемая матрица жесткости элемента, образованная следующим образом:

$$[k]_e = \frac{h}{2S} B^T D B, \quad (5.8)$$

На этом подготовительная работа заканчивается.

Самым главным этапом создания конечно-элементной модели является построение для всей системы **обобщенной матрицы жест-**

кости, в которую входят жесткости каждого элемента. При этом все внешние нагрузки приведены к узловым силам. Например, на рис. 5.4 показано, как массовая сила P , действующая в центре тяжести элемента, а также распределенная нагрузка q приводятся к системе узловых сил.

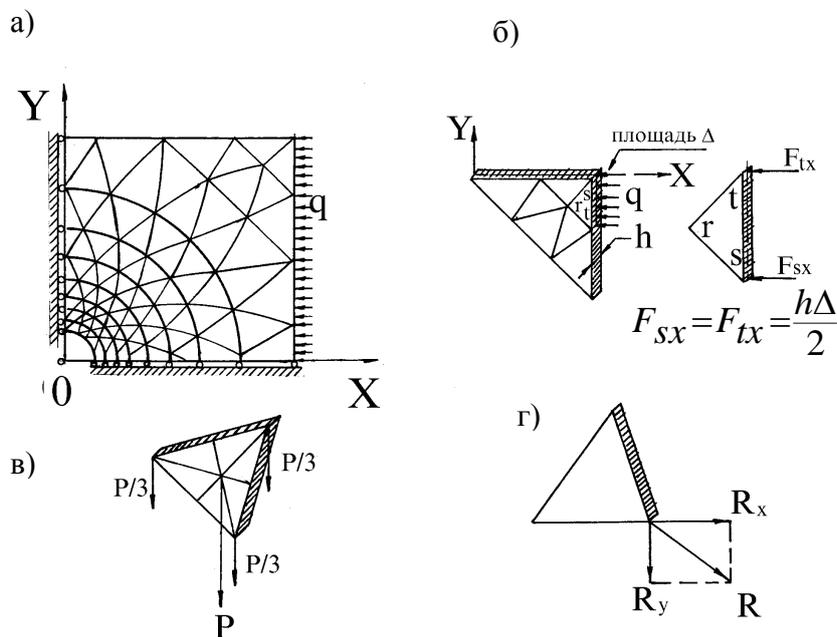


Рис. 5.4. Примеры приведения нагрузок к статистически эквивалентной системе узловых сил: а) распределенная нагрузка, действующая на исследуемую область; б) замена распределенной нагрузки q узловыми силами F_{tx} и F_{sx} ; в) разложение силы тяжести P на систему узловых сил; г) разложение узловой силы R на составляющие R_x и R_y .

Для линейных задач справедлив принцип суперпозиции. Из множества векторов $\{F\}_e$ и $\{\delta\}_e$ формируется обобщенный вектор сил $\{F\}$ и вектор перемещений узлов $\{U\}$, которые связаны между собой равенством:

$$\{F\} = K \{U\}. \quad (5.9)$$

Здесь K – обобщенная матрица жесткости системы, элементами которой являются матрицы жесткости каждого конечного элемента:

Укрупнено алгоритм метода конечных элементов показан на (рис. 5.5).

Вводимая в расчетную схему исходная информация состоит из следующих параметров: число конечных элементов, на которые разбивается исследуемая область; общее число узлов образующихся при этом разбиении и координаты этих узлов; число типов элементов с разными физико-механическими свойствами; значения физико-механических свойств для каждой группы элементов, значения напряжений и перемещений, характеризующие граничные условия.

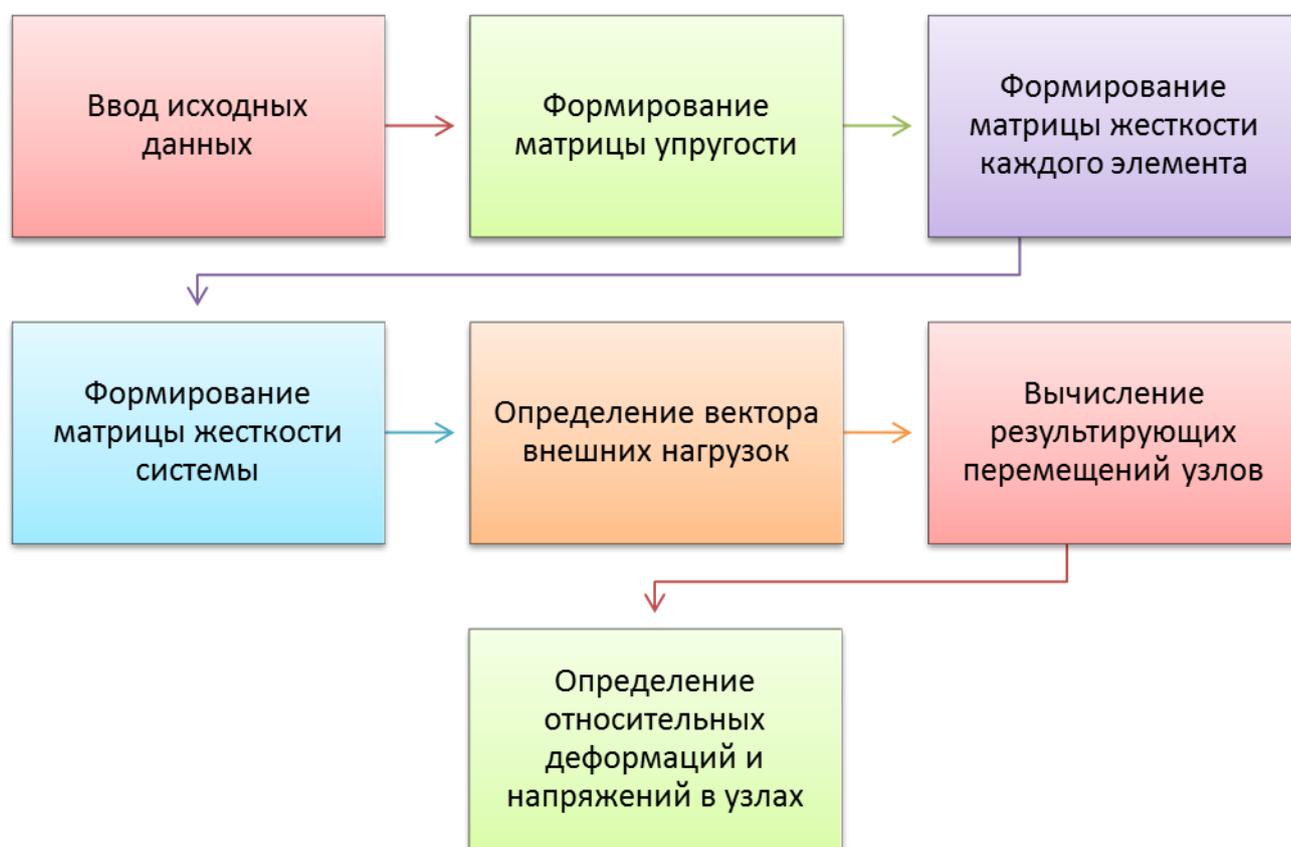


Рис. 5.5. Этапы расчета математической модели методом конечных элементов

Для того, чтобы получить достаточно точное распределение напряжений вблизи выработки, конечные элементы нужно делать мелкими, следовательно, их будет много. Для каждого элемента нужно сформировать несколько матриц, которые потом сливаются в общую матрицу жесткости, т.е. нужно формировать большие массивы чисел. Для этого необходимы большой объем оперативной памяти

ПЭВМ и хорошо организованная вычислительная программа. Одна из первых вычислительных программ, реализующих МКЭ для задач геомеханики, приведена в известной монографии Б.А. Фадеева [107] и Б.З. Амусина [108]. В настоящее время имеются лицензионные программные продукты, реализующие МКЭ для различных задач механики, разработанные различными компаниями. Они обладают широкими возможностями и мощным интерфейсом (ANSIS, Solidworks, PIAxis, PHASE2 и др.). В Национальном горном университете разработаны собственные версии вычислительных программ учебного и исследовательского плана. К настоящему моменту на их основе получено много решений различных геомеханических задач.

На рис. 5.6 показаны расчетная схема и конечноэлементная сетка для решения тестовой задачи о распределении напряжений вокруг цилиндрической протяженной выработки, которая была рассмотрена выше в разделе 4.2. Сетка изображена со сгущением элементов по мере приближения к интересующей нас приконтурной области (рис. 5.6,б).

Численное решение сравнивается с точным (аналитическим), которое определяется формулами 4.17. В численном решении начальное поле принято равным: $\sigma_x = \sigma_y = \gamma H = 30 \text{ Мпа}$. Диаметр выработки составляет 2 м.

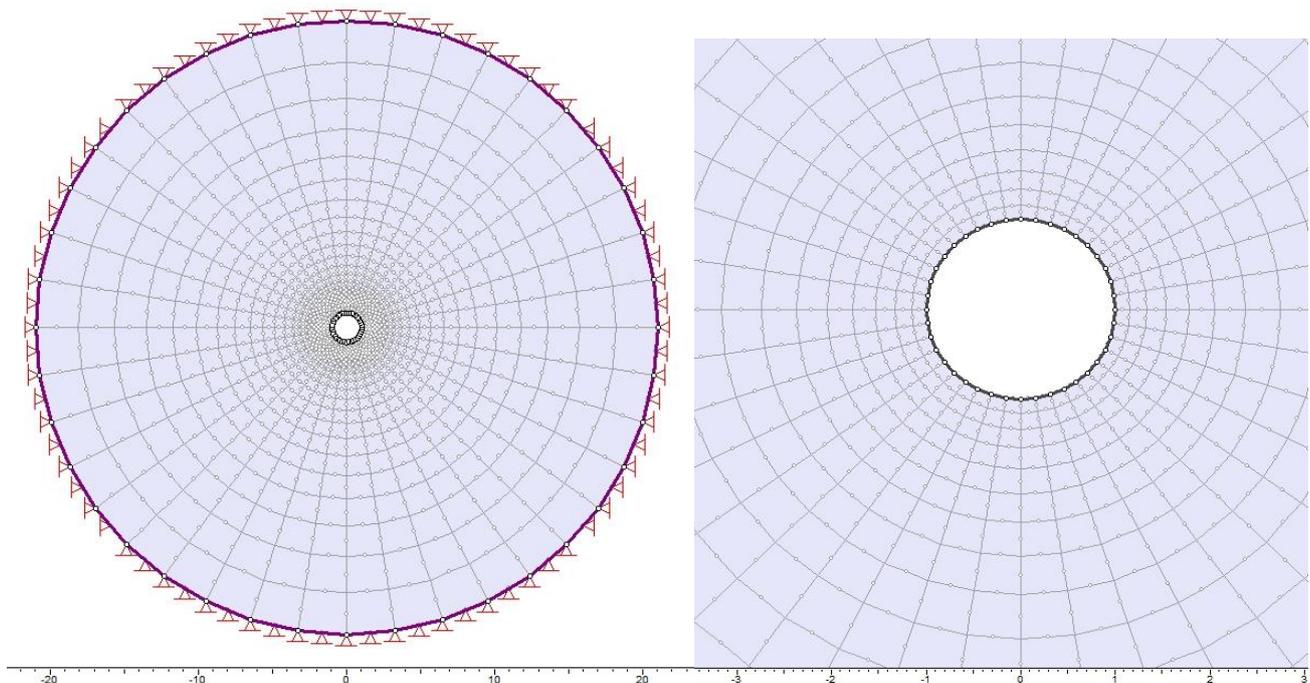


Рис. 5.6. Расчетная схема и конечноэлементная сетка для определения напряжений вокруг цилиндрической выработки

Главные напряжения σ_1 , совпадающие в осесимметричной задаче с тангенциальными напряжениями σ_θ , представлены на рис. 5.7 в цветовой гамме. Вдоль горизонтальной оси выведены числовые значения напряжений, которые на дополнительном фрагменте рис. 5.7 показаны в виде графика и качественно полностью соответствуют точному решению: имеют максимум на контуре выработки, равный $2\gamma H$ (в данном примере $2\gamma H = 60\text{МПа}$), и убывают до величины γH (30МПа) по мере удаления от контура выработки. Числовые значения в численном и точном решениях совпадают с погрешностью, меньшей 2 %.

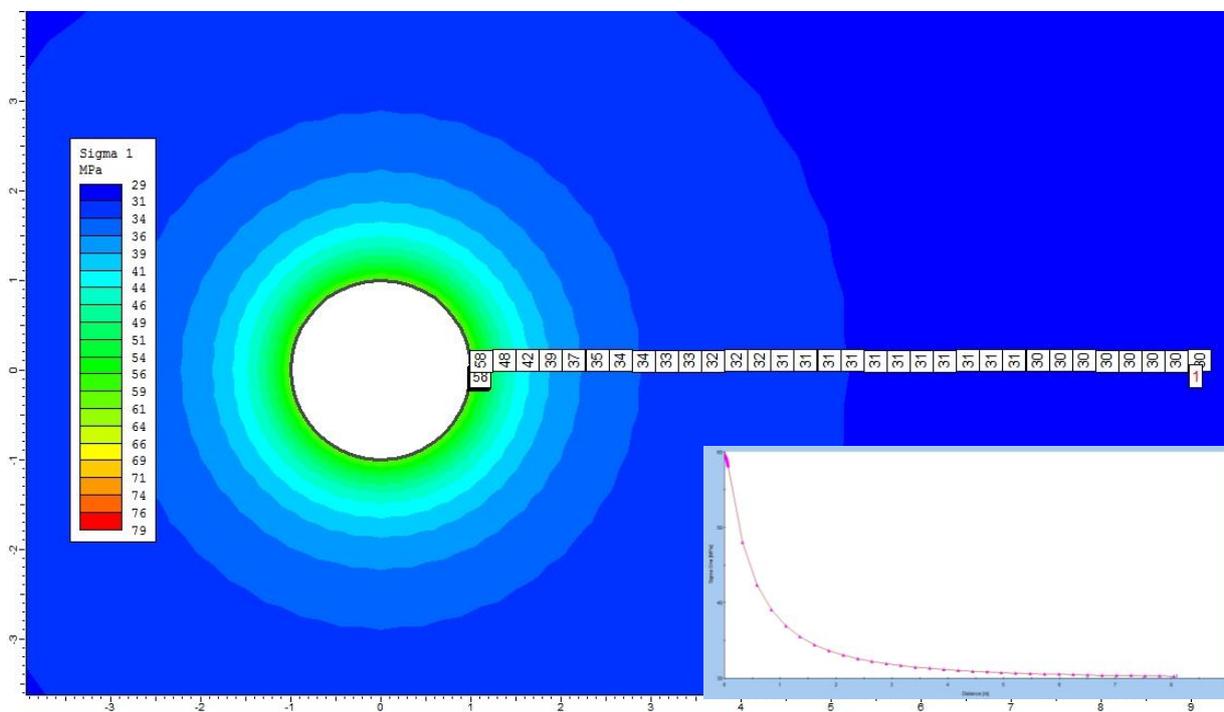


Рис. 5.7 Распределение напряжений σ_1 вокруг протяженной круглой выработки (упругая задача, программа PHASE 2)

Метод конечных элементов позволяет моделировать напряженно-деформированное состояние вокруг выработки любого очертания, чего нельзя достичь аналитически. Из существа метода вытекают его огромные возможности для математического моделирования различных неоднородностей. По сути, для каждого элемента можно задать свои физико-механические свойства. В частности, легко моделируется слоистость. На рис.5.8-5.9 для протяженных выработок прямоугольной и арочной формы, пройденных в слоистой среде, показаны

напряжения σ_y , наиболее важные для анализа. Расчеты выполнены при начальном поле напряжений: $\sigma_x = \sigma_y = \gamma H = 30 \text{ Мпа}$.

Цветовая гамма и числовые значения показывают, что в кровле над выработанным пространством имеет место падение напряжений. В непосредственной близости от контура они близки к нулю и при определенных соотношениях между геометрическими размерами выработки могут поменять знак, т.е. в кровле появятся растягивающие напряжения. В углах выработки имеет место высокая концентрация сжимающих напряжений, достигающая $1,5...2\gamma H$. При арочной форме выработки (рис. 5.9) напряжения в кровле сглаживаются. Высокая концентрация напряжений сохраняется в боках и нижних углах выработки.

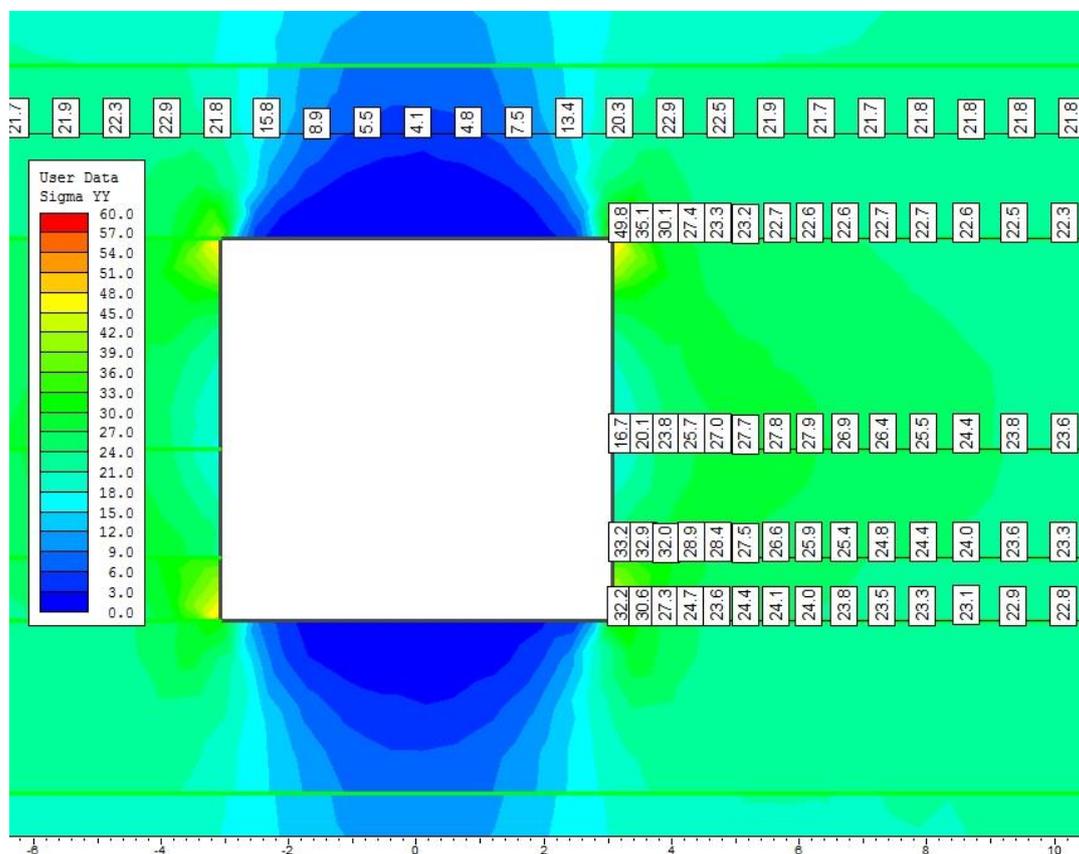


Рис. 5.8. Распределение вертикальных нормальных напряжений σ_y в окрестности протяженной выработки прямоугольного сечения (компьютерная программа PHASE 2)

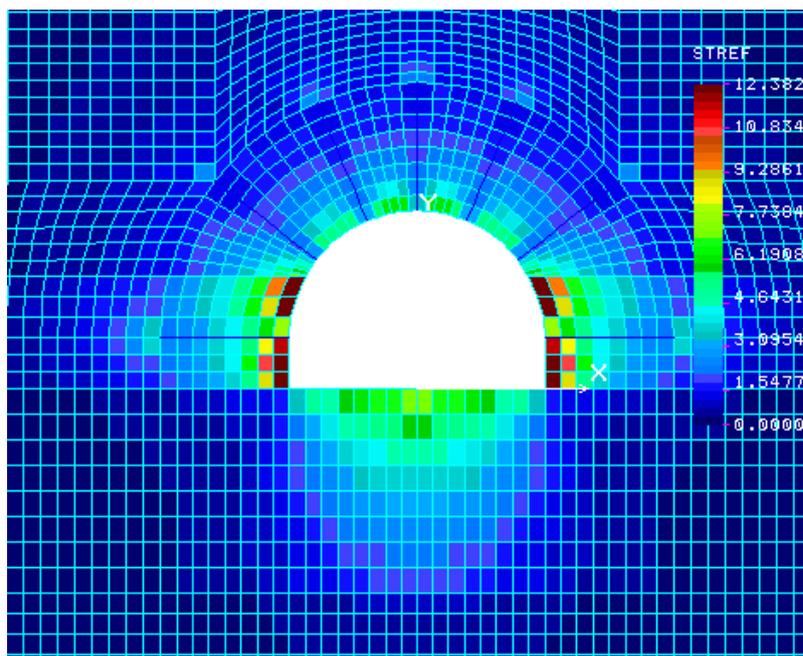


Рис. 5.10. Картина распределения величины σ_e/R_c в окрестности выработки при установке 7 анкеров (авторское программное обеспечение)

Для этого необходимо иметь две экспериментальные кривые деформирования материала « $\sigma - \varepsilon$ » и « $\sigma_i - \varepsilon_i$ », где σ_i , ε_i - соответственно интенсивность напряжений и деформаций (рис. 5.11).

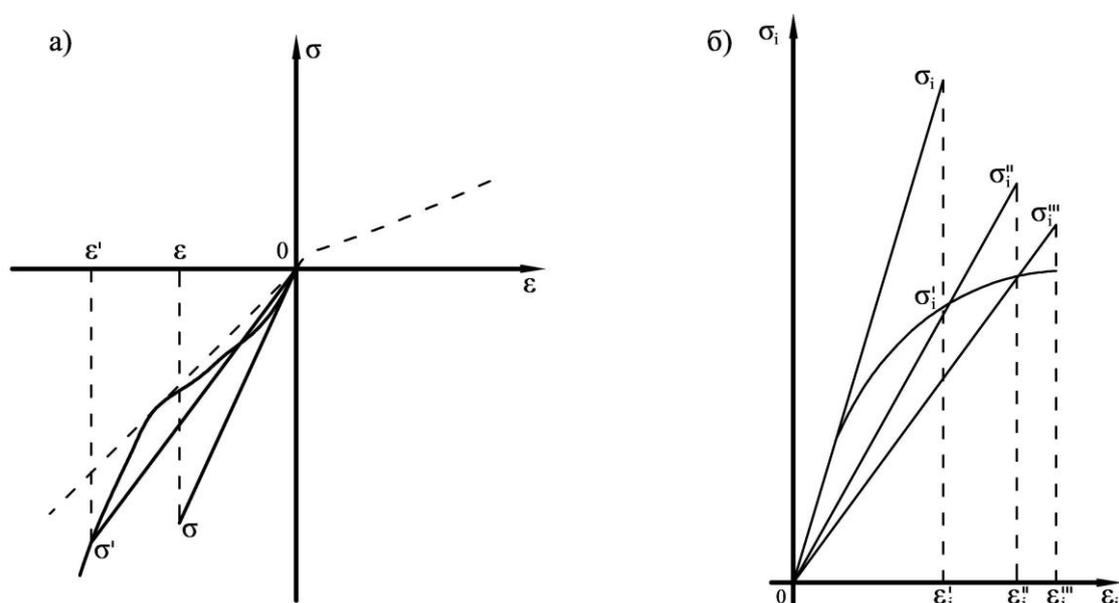


Рис. 5.11. Схематическая зависимость между напряжениями и деформациями (а) и интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (б)

Последовательность решения такова. На «нулевом» шаге осуществляется упругое решение. Если хотя бы в одном элементе интенсивность напряжений превосходит предел текучести или расчетная

точка (σ, ε) не лежит на экспериментальной кривой, то расчет повторяется при новых, уточненных, значениях приведенных модулей E' , μ' , G' для этого элемента.

Эти модули определяются по кривым деформирования по формулам:

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot \frac{3 \frac{\sigma}{\varepsilon}}{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2 \frac{\sigma}{\varepsilon}}; \quad \mu' = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2 \frac{\sigma}{\varepsilon}}; \quad G' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{E'}{2(1 + \mu')}. \quad (5.11)$$

Для вычисленных значений σ , σ_i находятся соответствующие значения σ' , σ'_i , лежащие на кривых деформирования. Последние используются для вычисления новых значений E' , μ' , G' . Весь упругий расчет повторяется так до тех пор, пока точки (σ, ε) не «лягут» на кривые деформирования с заданной точностью.

На рис. 5.12 приведено решение упругопластической задачи, полученной аналитически в разделе 4.4. для цилиндрической выработки.

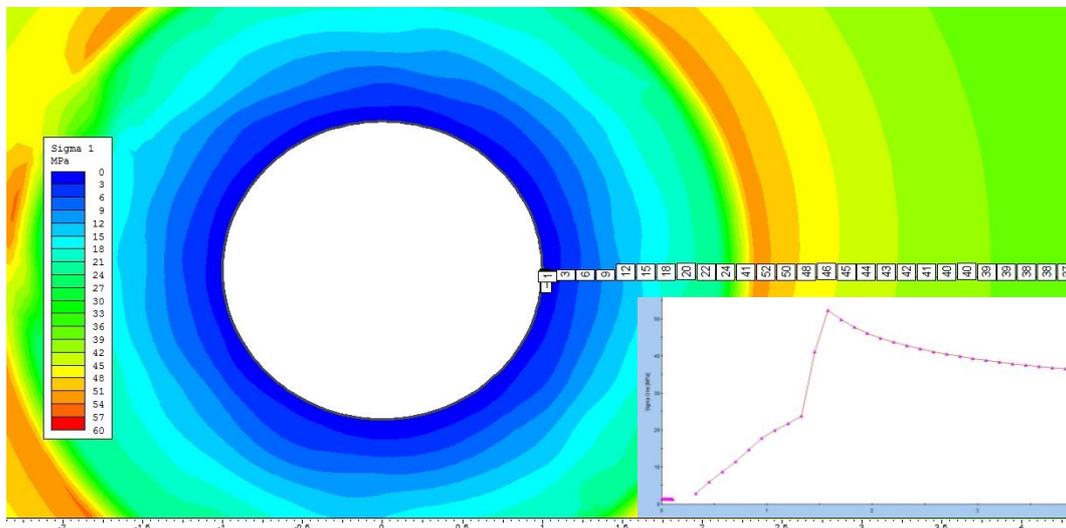


Рис. 5.12. Распределение напряжений σ_1 вокруг протяженной круглой выработки (упругопластическая задача, компьютерная программа PHASE 2)

Показано распределение главных напряжений σ_1 , совпадающих в осесимметричной задаче с тангенциальными напряжениями σ_θ . Характер напряжений, представленный цветовой гаммой и значениями

напряжений вдоль горизонтальной оси, полностью соответствует точному решению (рис. 4.12). Имеет место снижение уровня напряжений у контура выработки по сравнению с решением упругой задачи. Максимум напряжений перемещается вглубь массива к границе раздела упругой и неупругой областей.

На рис. 5.13 показано распределение напряжений вокруг парных выработок в случае «пучения» пород почвы. Задача решена методом итераций для случая потери упругопластической устойчивости при контурного породного массива.

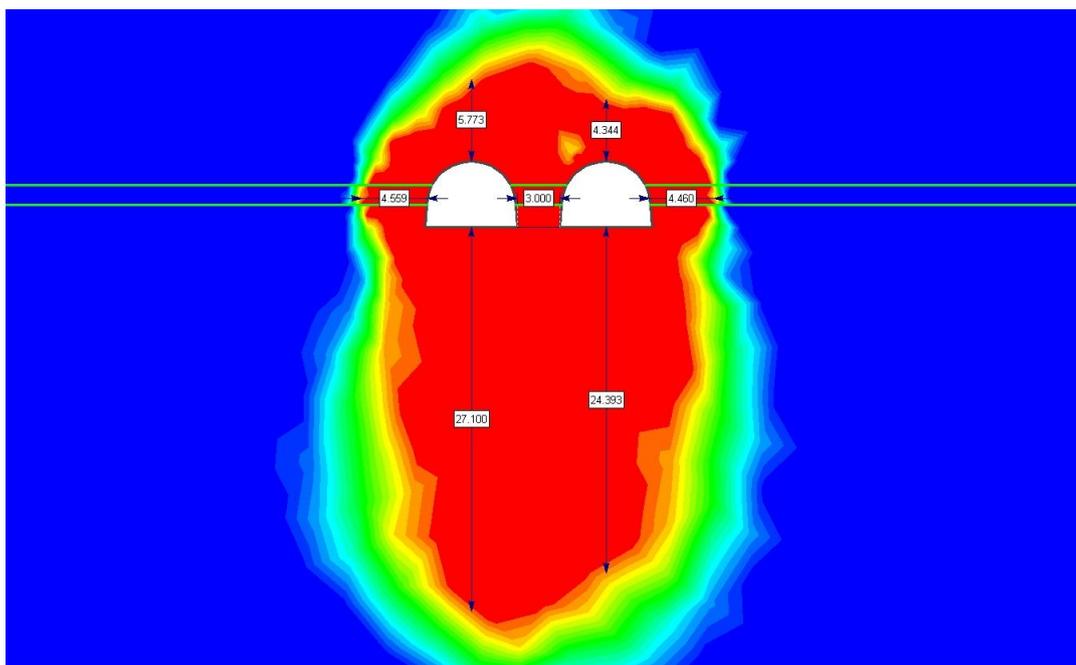


Рис. 5.13. Зона неупругих деформаций и векторы перемещений при пучении пород почвы

Точно также можно разбить на подобласти и некоторую трехмерную область. Только конечными элементами будут уже не треугольники, а, например, тетраэдры (рис. 5.14). Конечно, в этом случае связь между перемещениями внутренней точки элемента и перемещениями узлов будет иметь более сложную форму. Гораздо большую размерность будет иметь матрица жесткости системы. Потребуется большая оперативная память вычислительной машины.

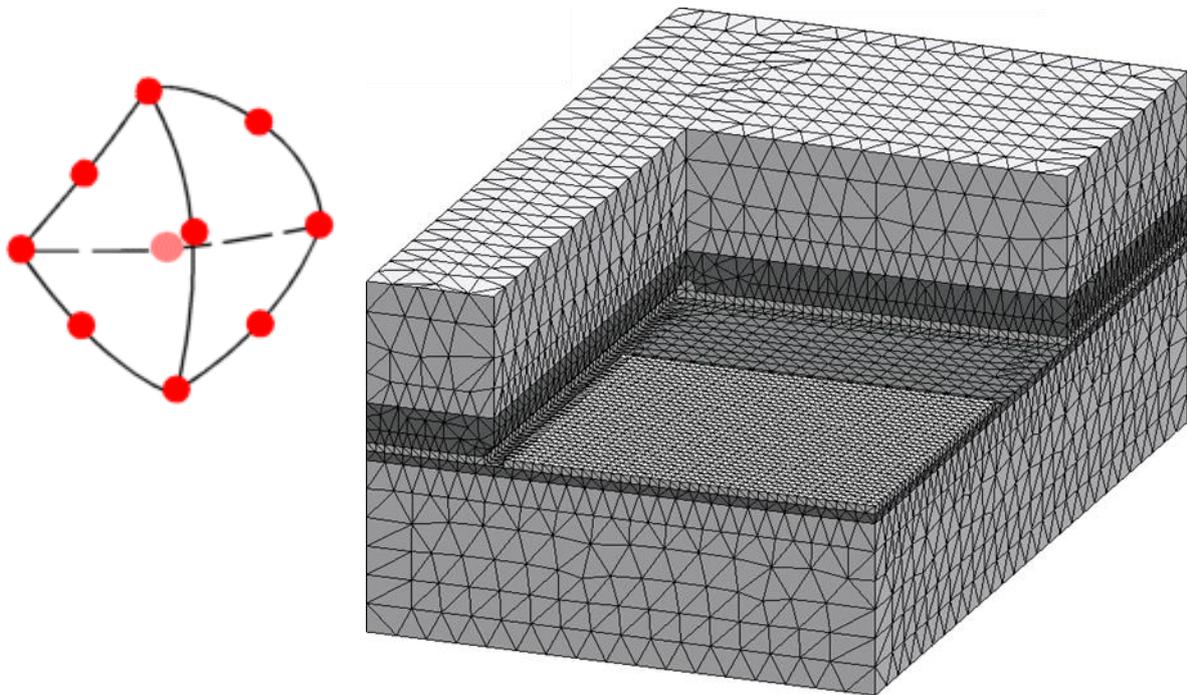


Рис. 5.14. Аппроксимация исследуемой области конечными элементами-тетраэдрами

Кстати, именно нехватка памяти являлась одно время сдерживающим фактором для использования МКЭ при переходе на персональные ЭВМ.

Возможно, поэтому в геомеханике интенсивно стал использоваться другой, также очень эффективный, численный метод решения задач механики деформируемого тела - метод граничных элементов.

5.2. Метод граничных элементов

Идея метода граничных элементов заключается в следующем. В теории упругости решены некоторые простые задачи, например, известная задача Кельвина о действии сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (рис. 5.15).

В произвольной точке области $M(x, y)$ определены напряжения σ и перемещения U от действия этой силы. В прямоугольной системе координат они определяются через некоторую функцию координат точки и ее производные.

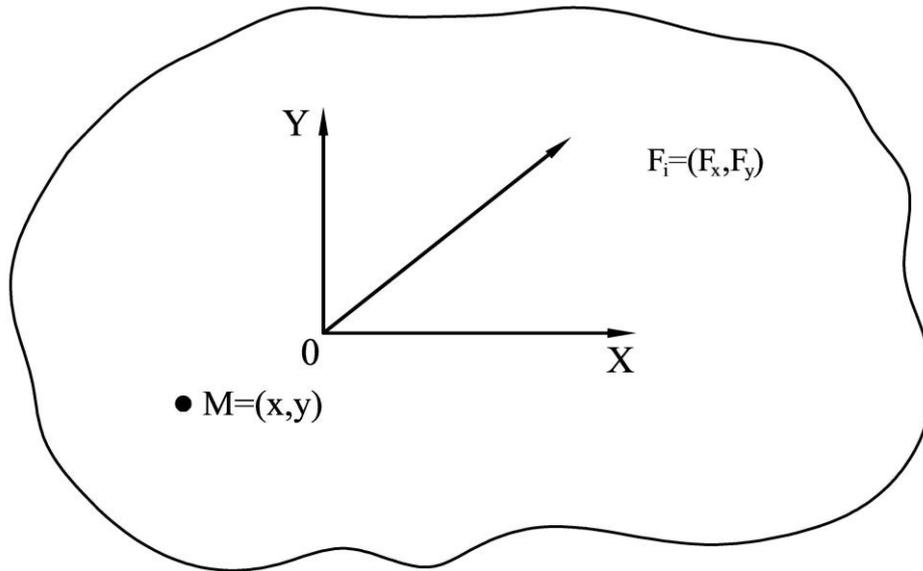


Рис. 5.15. Действие сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (задача Кельвина)

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \ln(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Здесь μ - коэффициент Пуассона. Выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_x [2(1-\mu)g_{,x} - xg_{,xx}] + F_y (2\mu g_{,y} - yg_{,xx}), \\ \sigma_{yy} &= F (2\mu g_{,x} - xg_{,yy}) + F_y [2(1-\mu)g_{,y} - yg_{,yy}] \\ \sigma_{xy} &= F_x [(1-2\mu)g_{,y} - xg_{,xx}] + F_y [(1-2\mu)g_{,x} - yg_{,xy}] \\ u_x &= \frac{F_x}{2G} [(3-4\mu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} (-yg_{,x}), \\ u_y &= \frac{F_x}{2G} (-xg_{,y}) + \frac{F_y}{2G} [(3-4\mu)g - yg_{,y}] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Можно убедиться, что полученные в таком виде напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, а перемещения - условию совместности деформаций.

Приведенное решение представляет собой пример так называемого сингулярного решения: напряжения и перемещения как функции координат точки непрерывны всюду за исключением начала координат (точки приложения силы F), где они не определены, т.е. сингулярны.

Если в бесконечной среде будут действовать несколько сосредоточенных сил, то решение задачи о напряжениях и перемещениях в произвольной точке среды можно получить методом суперпозиции (рис. 5.16). Выражения для напряжений и перемещений примут более

сложный вид, поскольку в них внесет свой «вклад» каждая из действующих сил.

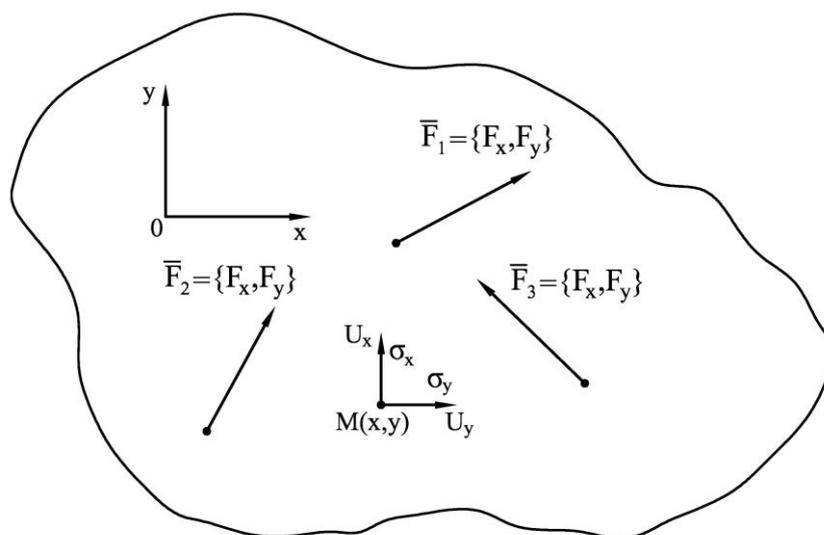


Рис. 5.16. Действие нескольких сосредоточенных сил в бесконечной упругой среде

Можно пойти дальше и, используя тот же принцип, получить решения для случая, когда усилия приложены не к точкам, а равномерно распределены вдоль некоторого отрезка конечной длины ($2a$) в бесконечно упругом теле (рис. 5.17).

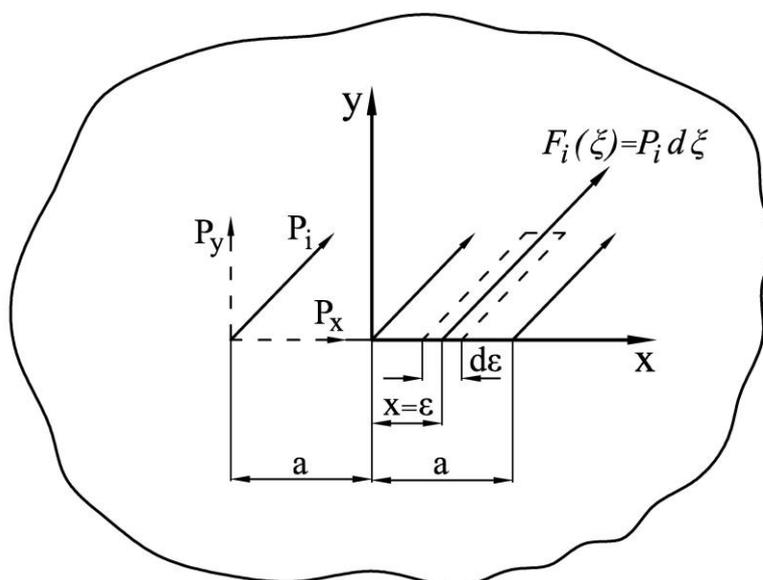


Рис. 5.17. Интегрирование решения Кельвина

Решение при этом существенно усложняется. Напряжения и перемещения произвольной точки среды выражаются через функцию:

$$f(x, y) = \int_{-a}^a g(x - \xi, y) d\xi.$$

или

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[y \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \times \right. \\ \left. \times \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right], \quad (5.14)$$

и ее частные производные:

$$f'_x = +\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right],$$

$$f'_y = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right],$$

$$f''_{xy} = +\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right], \quad (5.15)$$

$$f''_{xx} = -f''_{yy} = +\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right].$$

Напряжения и перемещения в произвольной точке среды от действия постоянного усилия P имеют вид:

$$\sigma_x = P_x [(3-2\nu)f'_x + yf''_{xy}] + P_y (2yf'_y + yf''_{yy}),$$

$$\sigma_y = P_x [-(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}] + P_y [2(1-\nu)f'_y - yf''_{yy}], \quad (5.16)$$

$$\tau_{xy} = P_x [2(1-\nu)f'_y + yf''_{xy}] + P_y [(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}]$$

перемещения

$$u_x = \frac{P_x}{2G} [(3-4\nu)f + yf'_y] + \frac{P_y}{2G} (-yf'_x),$$

$$u_y = \frac{P_x}{2G} (-yf'_x) + \frac{P_y}{2G} [(3-4\nu)f - yf'_y] \quad (5.17)$$

В точках $x=\pm a$ функция $f(x, y)$, а следовательно и напряжения, а также связанные с ними перемещения, имеют особенность (сингулярность).

Представим теперь, что таких отрезков в бесконечном теле много, они примыкают друг к другу, образуя некоторую замкнутую ло-

маную линию. Напряжения в произвольной точке среды получим, суммируя вклады от действия усилий на каждом из этих отрезков. Этот принцип использован для решения уже известной нам задачи об одиночной выработке в массиве, которую можно представить как полость в бесконечном упругом теле. Контур этой полости заменяется описанной выше ломаной и представляет собой некоторую границу в упругом теле. Поэтому отрезки ломаной, на которых приложены усилия P_j , $j = 1, N$ (N - число отрезков), называются **граничными элементами**. Численная процедура заключается в суммировании вкладов от усилий на каждом j -м отрезке - граничном элементе. Влияние каждого усилия на соответствующем отрезке дает сингулярное решение, которое удовлетворяет уравнению равновесия. Поэтому нет необходимости разбивать область на подобласти как в МКЭ. Делится на элементы только граница области (рис. 5.18).

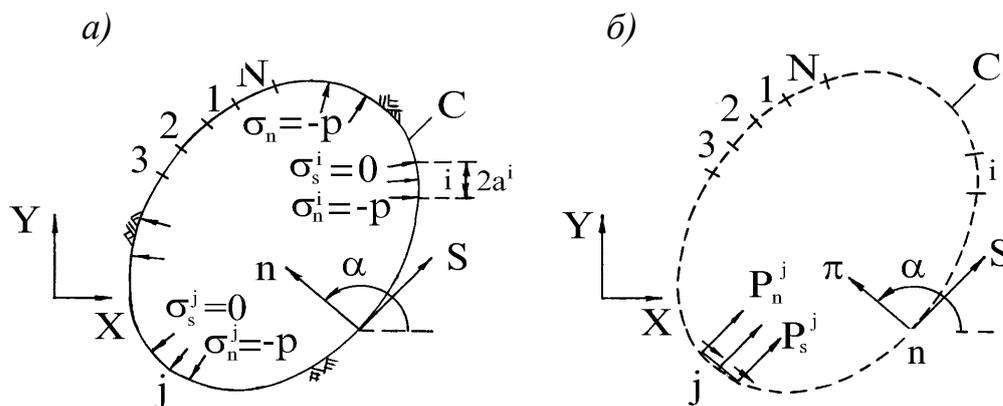


Рис. 5.18. Иллюстрация метода граничных элементов для задачи о полости: а) физическая задача; б) численная модель

Длина каждого элемента $-2a^i$. Вместе с глобальной системой координат XOY рассматривают для каждого элемента локальные координаты n, s , изменяющиеся от точки к точке. На каждом из N отрезков действуют постоянные нормальное P_s^j и касательное P_n^j напряжения. На рис.5.18 для простоты показаны только напряжения, приложенные к j -му отрезку и обозначенные P_s^j и P_n^j . В конечном итоге, как и в МКЭ, задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_S^i &= \sum_{j=1}^N A_{SS}^{ij} P_S^i + \sum_{j=1}^N A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, N. \quad (5.18)$$

Здесь A_{SS}^{ij} , - так называемы коэффициенты влияния, суммирующие вклады каждого i -го усилия, заданного на j -м элементе границы. Левая часть уравнений содержит напряжения (касательные и нормальные), которые возникают в точке среды под действием суммарного влияния усилий P_S^j и P_n^j приложенных на каждом из N отрезков. Принципиальным моментом, однако, является то, что действительные нормальное и касательное напряжения на j -м отрезке не равны P_S^j и P_n^j . Для каждого граничного элемента необходимо различать две разные группы напряжений: **приложенные** P_S^j и P_n^j и **действительные** σ_S^j , σ_n^j , которые вызваны действием приложенных напряжений на всех N элементах кривой. Величины P_S^j и P_n^j в правых частях уравнений (5.17) являются «**фиктивными**». Их нужно определить так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Рассмотрим эти условия.

В задачах геомеханики используется понятие начальных напряжений, имеющих место в массиве до начала производства горных работ. Изначально в каждой точке породного массива действуют напряжения:

$$(\sigma_y)_0 = \gamma H,$$

$$(\sigma_x)_0 = \lambda \gamma H.$$

От влияния выработки возникают дополнительные напряжения: σ_y, σ_x .

Полные напряжения в точке равны:

$$\begin{aligned} \sigma_y' &= (\sigma_y)_0 + \sigma_y, \\ \sigma_x' &= (\sigma_x)_0 + \sigma_x. \end{aligned} \quad (5.19)$$

На контуре выработки полные напряжения равны нулю. Тогда дополнительные напряжения на контуре (границе области) выражаются через начальные:

$$\sigma_y = -(\sigma_y)_0 = -\gamma H, \quad (5.20)$$

$$\sigma_x = -(\sigma_x)_0 = -\lambda \gamma H.$$

Это и есть граничные условия. Таким образом, перейдя к локальной системе координат n, s сформируем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -(\sigma_s)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{SS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ -(\sigma_n)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned} \right\}, i = 1, \dots, N.$$

Решив ее, определим значения «фиктивных» напряжений P_s^j и P_n^j и через них определим напряжения и перемещения в любой точке области.

Теперь более ясен смысл коэффициентов влияния. Так, коэффициент A_{Sn}^{ij} , например, дает действительное касательное напряжение в центре i -го отрезка (σ_s^i) , вызванное постоянной единичной нагрузкой, приложенной на j -м отрезке ($P_n^j = 1$). Подробные сведения о численной реализации МГЭ можно почерпнуть в монографии С. Крауча и Старфилда [101].

По сравнению с МКЭ метод граничных элементов более экономичен. Система уравнений имеет порядок намного меньший, поскольку она сформирована только для N элементов, заданных на контуре выработки. Однако метод граничных элементов имеет несколько меньше возможностей для моделирования различных неоднородностей среды и нелинейности физических соотношений. Хотя и здесь существуют различные подходы. Все зависит от базового решения.

В рассмотренном выше подходе (он называется метод «фиктивных нагрузок») в качестве базового было принято решение задачи Кельвина.

Разработан и другой подход, использующий в качестве базового решение известной в теории упругости задачи о разрыве смещений вдоль некоторого отрезка конечной длины внутри бесконечного упругого тела. В форме «разрывных смещений» МГЭ очень эффективен для решения задач, связанных с трещиноватостью горных пород. Есть возможность моделировать и «зияющие» трещины, и заполненные материалом-заполнителем. В последнем случае граничные элементы, которые моделируют трещину, представлены как упругий контакт соответствующей жесткости. Например, в [109] приведено

решение для двух сближенных выработок, одна из которых пересечена трещиной рис. 5.19.

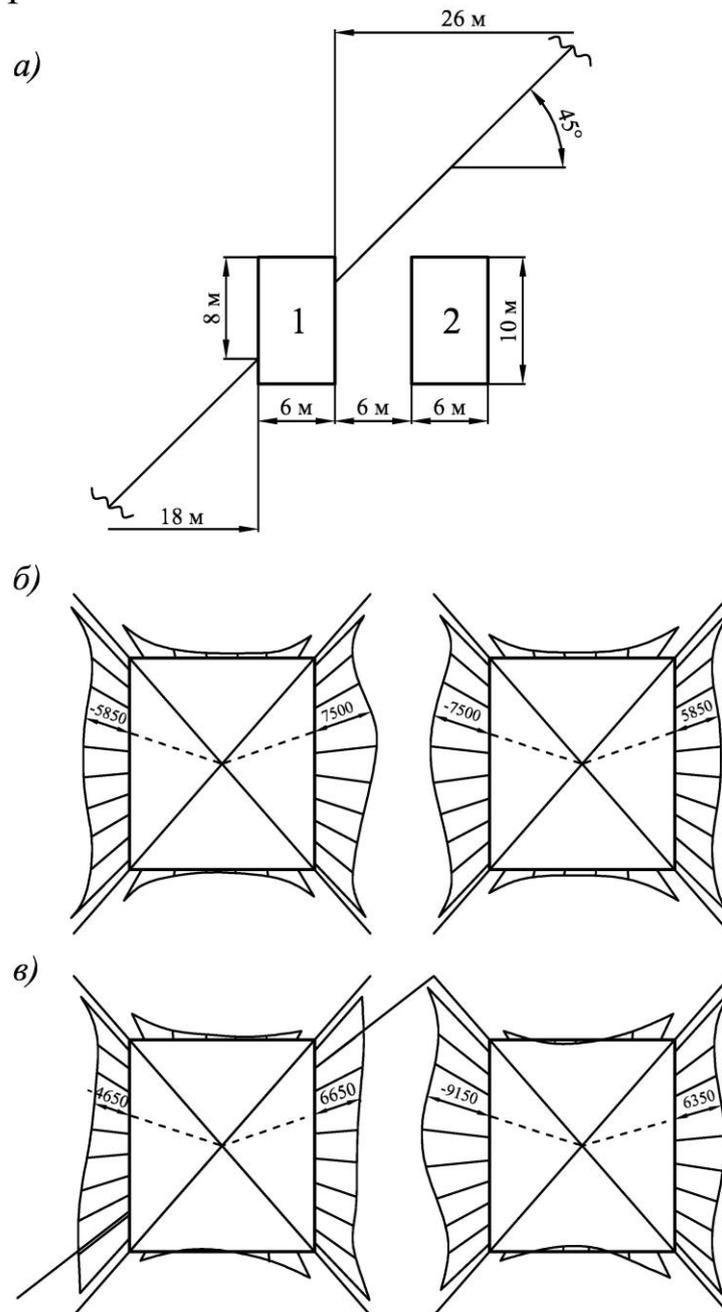


Рис. 5.19. Расчетная схема (а) и тангенциальные напряжения на контуре выработки в случае отсутствия нарушения (б), и наличие нарушения (в)

С помощью таких упругих контактов (пластовых элементов) легко моделируется угольный пласт, который отличается по жесткости от вмещающих пород. Например, в [110] приводится решение задачи о влиянии геологического нарушения на напряженное состояние пород впереди забоя выработки. Решения большого класса геомеханических задач методом граничных элементов приведены в монографии [111].

Современные стандартные программные средства позволяют существенно расширить возможности МГЭ. Так, например, на кафедре строительных геотехнологий и конструкций НГУ разработан программный продукт (ПП) Underground, который предназначен для решения различных, как внешних, так и внутренних задач механики твердого тела. Однако, основной упор при разработке программного продукта делался на определение напряженно-деформированного состояния горного массива в окрестности как одиночной, так и системы горных выработок, проведенных в устойчивых породных массивах. В зависимости от особенностей конкретной задачи ПП Underground реализует метод граничных элементов или в форме разрывных смещений, или в форме фиктивных нагрузок, а также прямой метод граничных интегралов.

На рис. 5.20 приведен пример расчета, характеризующий состояние приконтурного массива в окрестности выработки круглого поперечного сечения, проведенной в устойчивых горных породах с пределом прочности на одноосное сжатие 5 МПа, на одноосное растяжение – 1,7 МПа на глубине 200 м.

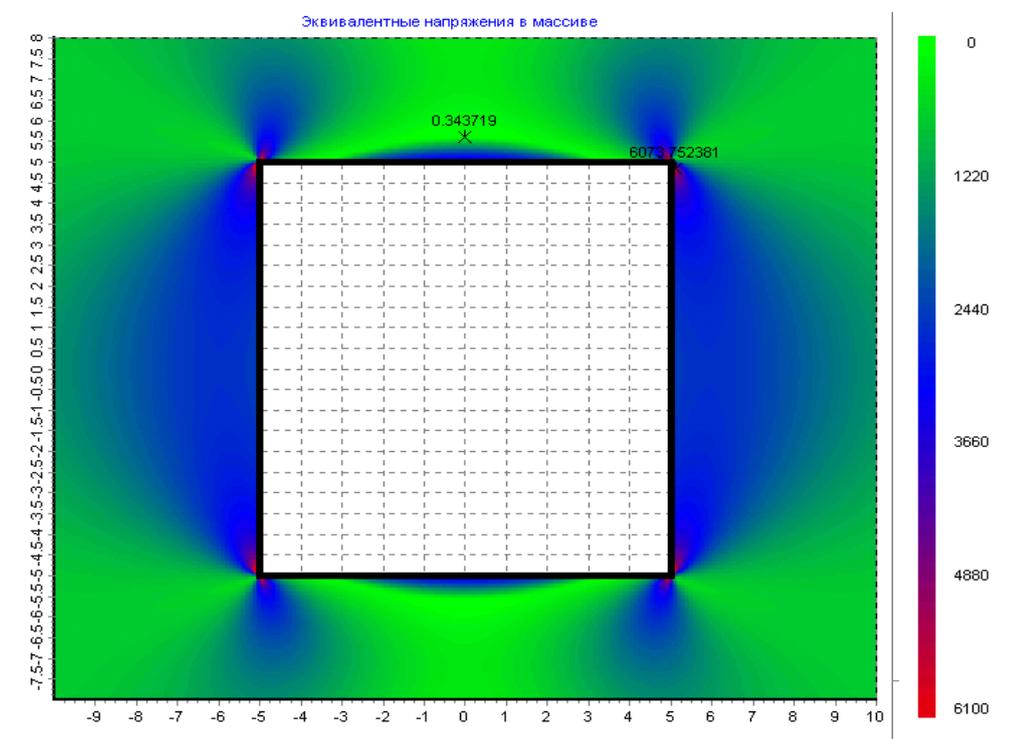


Рис. 5.20. Распределение коэффициента устойчивости массива горных пород в окрестности протяженной горной выработки кругового сечения

Здесь расчетная схема представлена четвертью сечения выработки, симметричной относительно линий параллельных осей OX и OY , которые пересекаются в точке $(0,0)$. Контур выработки показан жирной линией. Изолинии соединяют точки массива с одинаковым значением коэффициента устойчивости.

Связь с AutoCAD позволяет наглядно аппроксимировать контур горной выработки (выработок) и тут же задавать граничные условия. Достаточно начертить в AutoCAD расчетную схему и координаты ГЭ считываются с графического изображения и передаются в программу. Это открывает большие возможности для моделирования сложных расчетных схем.

И, наконец, связь с Microsoft Excel позволяет выводить результаты в виде числового материала в книгу Microsoft Excel, если пользователь желает их более детально обработать.

5.3. Метод дискретных элементов

Метод дискретных элементов (МДЭ) (в английском варианте: "The distinct element method" – метод видимых (отличимых) элементов), разработан доктором Г. Кундаллом в 1978 году [112]. Он базируется на двух фундаментальных законах физики – втором законе Ньютона и законе упругих деформаций Гука.

Областью применения МДЭ являются грунты, основания и фундаменты; породные массивы, имеющие сложную структуру; механические системы с освобождающимися связями; нелинейные динамические процессы, для которых он наиболее эффективен; химико-физические процессы (например, движение коллоидной жидкости); процессы обогащения полезных ископаемых методом флотации в тяжелых средах и многое другое.

Суть МДЭ применительно к моделированию сложноструктурных породных массивов, содержащих искусственные полости (выработки), состоит в следующем. Реальный породный массив в модели заменяется дискретными элементами, которые, в принципе, могут иметь любую форму, и лучше, если она будет близка к очертаниям элементов структуры массива. Однако, по ряду причин, важнейшей из которых является простота создания математической модели дискретной среды, элементы ее проще всего представить в виде шаров, которые в общем случае имеют разный диаметр (рис. 5.21).

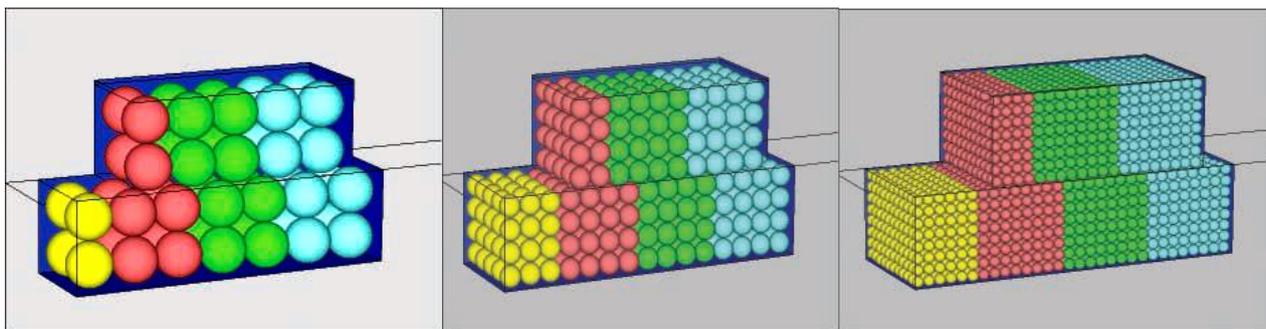


Рис. 5.21. Геометрическая модель породной среды при различных размерах дискретных элементов

Как видно из рисунка, модель сплошной или сыпучей (дискретной) среды, как правило, представляет собой конечное число попарно параллельных плоскостей, которые, пересекаясь, отделяют некоторое замкнутое пространство, в котором размещены шары – дискретные элементы. Шары взаимодействуют между собой и с ограничивающими плоскостями посредством сил трения и диссипативных сил, а также, и это главное, посредством неидеальных высвобождающихся связей, которые противодействуют их взаимопроникновению. Если иных связей нет, то шары имитируют сыпучую среду. Шары могут быть также «склеены» между собой и стенами посредством таких неидеальных невысвобождающихся связей, которые не только препятствуют их взаимопроникновению, но также разбеганию и вращению. В этом случае рассматриваемая механическая система имитирует сплошной массив.

Как только реакции в невысвобождающихся связях превышают некоторый предел, они ликвидируются как разрушенные и тогда уже система шаров и плоскостей имитирует разрушенный массив, который состоит из несвязанных между собой частиц и, возможно, сыпучего материала между ними. В самом же общем случае модель, состоящая из шаров и ограничивающих плоскостей, может имитировать сплошной породный массив, содержащий разрушенные участки.

Для того, чтобы среда состоящая из упругих шаров разного диаметра, соответствовала реальному породному массиву, авторами работы [104] вводятся следующие допущения:

1. Форма и размер дискретных элементов (шаров) не изменяются под действием приложенных нагрузок.
2. Реальные деформации дискретный элементов заменяются кажущимся взаимопроникновением шаров.

3. Временной шаг должен быть настолько малым, чтобы за то время, пока он продолжается, нарушения (дислокации) не могли распространяться на какие либо другие шары, кроме тех, которые находятся в непосредственном контакте с рассматриваемым шаром.

Последнее допущение является особенно важным, поскольку обуславливает очень удобное взаимодействие элементов – шаров: на каждом временном шаге равнодействующая сил, приложенных к каждому отдельному шару, определяется исключительно координатами центров рассматриваемого шара и тех шаров, которые в данный момент с ним соприкасаются.

Расчетная схема метода дискретных элементов приведена на рис. 5.22.

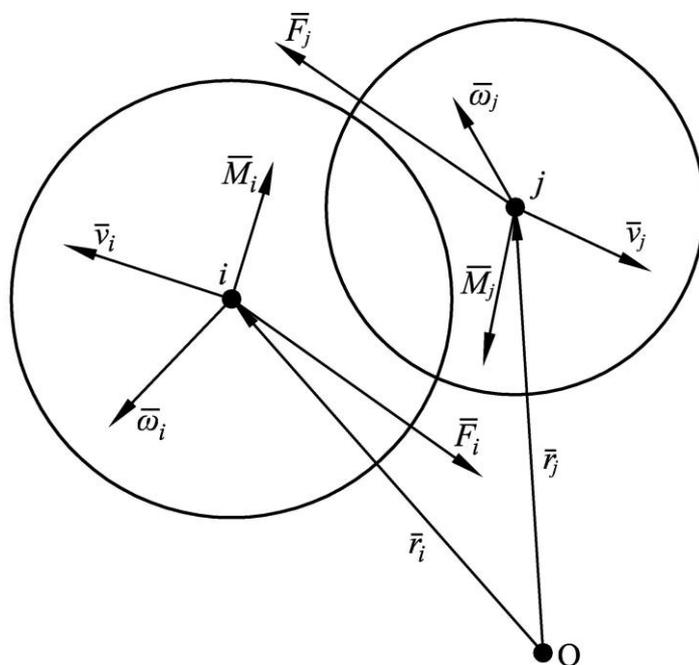


Рис. 5.22. Расчетная схема взаимодействия двух шаров

Элементы-шары нагружены гравитационными силами и проявляют при взаимодействии друг с другом упругие и вязкие свойства.

Физико-механические свойства дискретных элементов задаются таким образом, чтобы их поведение в общей массе было адекватно поведению исходной среды. Для каждого элемента известны масса, скорость, ускорение и координаты центра тяжести. Кроме того, к каждому элементу в отдельности прикладывается сила F_i , как равнодействующая сил тяжести, упругой реакции, вязкого и кулонова трения, отражающих текущее механическое состояние массива в рассматриваемый момент времени.

Движение каждого элемента описывается уравнением Лагранжа 2-го рода. Из всех численных методов, применяемых для решения поставленной задачи, наиболее эффективен модифицированный метод Эйлера.

Об использовании метода Эйлера для решения динамических задач применительно к механическим системам с сосредоточенными массами можно ознакомиться в работах [113-116].

Известны два способа использования метода Эйлера. Первый заключается в том, что вначале, исходя из физических соображений, составляют систему дифференциальных уравнений и уравнений начальных условий, а потом решают их, используя формализованный метод Эйлера.

В соответствии со вторым способом метод Эйлера используют не только для решения поставленной задачи, но и для описания собственно физического процесса, т.е. для постановки самой задачи.

Второй способ был использован в работах [117-118] для разработки математической модели метода дискретных элементов в векторном изложении. Способ ориентирован на использование возможностей современных вычислительных машин, в частности матричной математической системы Matlab.

Описание физического процесса и вычисление его параметров в соответствии с формализованным методом Эйлера приведены в табл. 5.1.

В табл. 5.1 и на рис. 5.22 приняты следующие обозначения: n – номер полушага и шага по модельному времени ($n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$);

t – модельный отсчет времени (знак «+» следует формально понимать, как временные шаги в будущее, а знак «-», как временные шаги в прошлое относительно момента времени $t=0$);

\bar{r} (или \bar{r}^n) – матрица-строка, компонентами которой являются радиусы-векторы центров шаров: $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_N)$ или $\bar{r}^n = (\bar{r}_1^n, \bar{r}_2^n, \bar{r}_3^n, \dots, \bar{r}_N^n)$, где N – общее число шаров;

\bar{v} (или \bar{v}_n) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы скоростей центров шаров: $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N)$ или $\bar{v}^n = (\bar{v}_1^n, \bar{v}_2^n, \dots, \bar{v}_N^n)$;

$\bar{\omega}$ (или $\bar{\omega}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых скоростей шаров: $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_N)$ или $\bar{\omega}^n = (\bar{\omega}_1^n, \bar{\omega}_2^n, \dots, \bar{\omega}_N^n)$;

\overline{F} (или \overline{F}^n) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы равнодействующих всех активных и пассивных сил (кроме сил инерции) для каждого отдельного шара: $\overline{F} = (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_N)$ или $\overline{F}^n = (\overline{F}_1^n, \overline{F}_2^n, \dots, \overline{F}_N^n)$;

\overline{M} (или \overline{M}^n) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы моментов сил, которые входят в матрицу-строку \overline{F} : $\overline{M} = (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_N)$ или $\overline{M}^n = (\overline{M}_1^n, \overline{M}_2^n, \dots, \overline{M}_N^n)$;

\overline{a} (или \overline{a}^n) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы ускорений центров шаров: $\overline{a} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_N)$ или $\overline{a}^n = (\overline{a}_1^n, \overline{a}_2^n, \dots, \overline{a}_N^n)$;

$\overline{\varepsilon}$ (или $\overline{\varepsilon}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых ускорений центров шаров: $\overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2, \dots, \overline{\varepsilon}_N)$ или $\overline{\varepsilon}^n = (\overline{\varepsilon}_1^n, \overline{\varepsilon}_2^n, \dots, \overline{\varepsilon}_N^n)$.

Таблица 5.1

Схема вычисления движения системы дискретных элементов

Этап	n	t	\overline{r}	\overline{v}	$\overline{\omega}$	\overline{F}	\overline{M}	\overline{a}	$\overline{\varepsilon}$	
Начальные условия	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\Delta t}{2}$	—	0	0	—	—	—	—	
	0	0	\overline{r}^0	—	—	\overline{F}^0	\overline{M}^0	\overline{a}^0	$\overline{\varepsilon}^0$	
Основной расчет	$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta t}{2}$	—	$\overline{v}^{\frac{1}{2}}$	$\overline{\omega}^{\frac{1}{2}}$	—	—	—	—	
	1	Δt	\overline{r}^1	—	—	\overline{F}^1	\overline{M}^1	\overline{a}^1	$\overline{\varepsilon}^1$	
	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3\Delta t}{2}$	—	$\overline{v}^{1\frac{1}{2}}$	$\overline{\omega}^{1\frac{1}{2}}$	—	—	—	—	
	- - - - -									
	$\frac{2i-1}{2}$	$\frac{2i-1}{2}\Delta t$	—	$\overline{v}^{\frac{2i-1}{2}}$	$\overline{\omega}^{\frac{2i-1}{2}}$	—	—	—	—	
	i	$i\Delta t$	\overline{r}^i	—	—	\overline{F}^i	\overline{M}^i	\overline{a}^i	$\overline{\varepsilon}^i$	
	- - - - -									

Наиболее сложным в такой вычислительной модели является определение равнодействующих сил, которые действуют в данный момент модельного времени на каждый шар. Для i -го шара равнодействующая сила F_i складывается из нормальных и тангенциальных сил упругопластического взаимодействия с соседними шарами и ограничивающими плоскостями и сил трения в точках контакта с ними. Условия контакта между дискретными элементами можно описать рядом формальных параметров, значения которых определяются на основе сравнительного анализа численных и физических экспериментов.

Переменные, вычисляемые в табл. 5.1 считаются постоянными величинами во времени на протяжении каждого модельного шага и скачкообразно изменяются в его конце. Дробные значения временных шагов в табл. 5.1 позволяют на порядок повысить точность вычислений без увеличения количества шагов. Вычисления производятся в следующем порядке:

- учитывая ускорения и скорости, которые заданы в начальных условиях (минус полшага и нулевой шаг), находят значения скоростей на первом полушаге;

- исходя из полученных значений скоростей и начальных условий, находят координаты центров шаров, равнодействующие сил и моментов, а затем и соответствующие значения ускорений на первом модельном шаге;

- исходя из значений скоростей, которые получены на первом полушаге, и ускорений – на первом шаге, находят значения скоростей на полуторном шаге и т.д.

Обращает внимание на себя отсутствие в табл. 5.1 значений угловых координат центров шаров (есть только их радиусы - векторы). Это следствие допущения о неизменности формы шаров, которое компенсируется допущением об их взаимодействии путем взаимопроникновения. В результате существенно упрощается алгоритм вычислений.

Результатом расчетов на основе метода дискретных элементов является получение общей картины напряженно-деформированного состояния рассматриваемого породного массива с определением величин главных напряжений, оседаний (перемещений) и деформаций, вызванных образованием в сплошной среде полости заданных размеров.

Отличительной особенностью данного метода, по отношению к изложенным выше методам конечных и граничных элементов, применимых только в случае моделирования сплошных сред, является возможность описания нелинейных динамических процессов, возникающих в деформирующемся породном массиве, содержащем полости и участки разрушенных горных пород.

На рис. 5.23 представлены результаты моделирования напряженно-деформированного состояния целика между двумя тоннелями с последующим разрушением целика и обрушением пород кровли в выработки. Моделирование выполнено авторами [119] с использованием программного обеспечения *PFC^{2D}* (Particle Flow Code in 2

Dimensions) , разработанного компанией *Itasca* на основе модификации метода дискретных элементов, предложенного Д. Потонди [120].

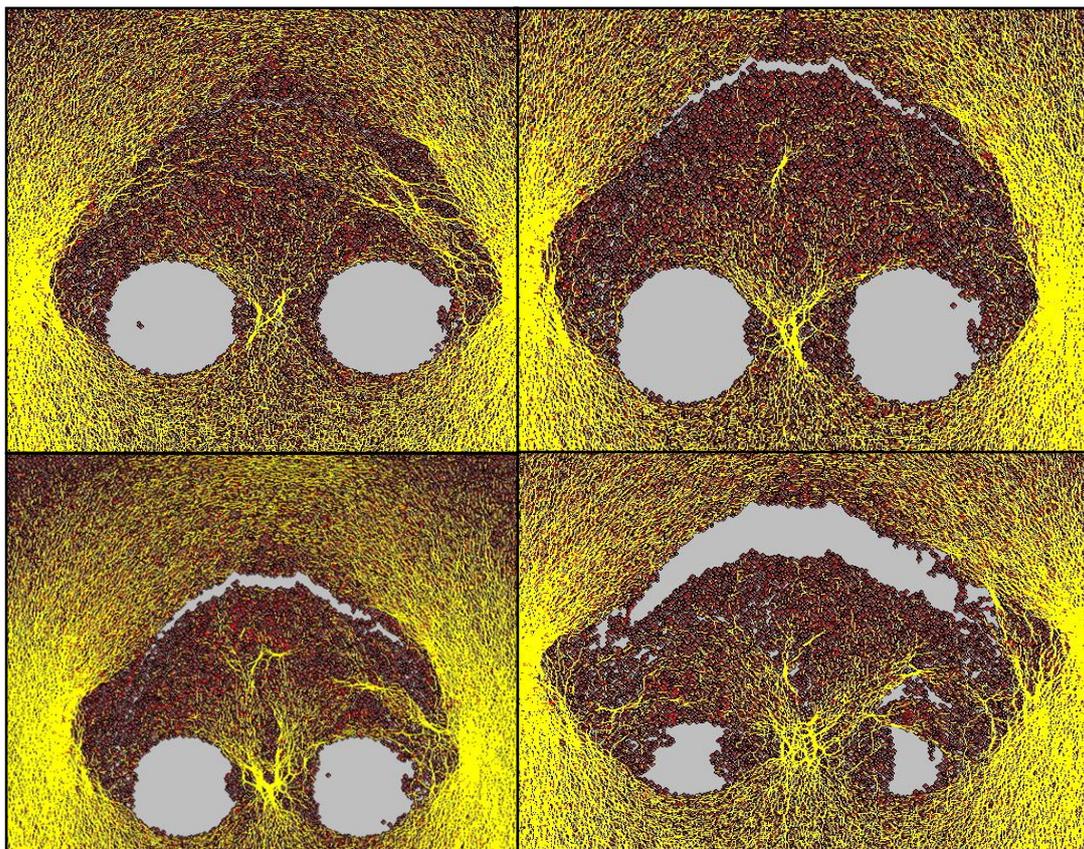


Рис. 5.23. Моделирование разрушения целик с использованием PFC^{2D} [120]

Метод предполагает достаточно высокие требования к технической базе при его реализации. Для обработки больших массивов данных и решения реальных задач необходимы высокое быстродействие компьютера и большой объем оперативной памяти.

Таким образом, существует довольно обширная группа методов – аналитических и численных, позволяющая достаточно точно установить напряженно-деформированное состояние породного массива в окрестности выработок при любом, в том числе и произвольном, их расположении в пространстве.

Контрольные вопросы к главе 5

1. Назовите наиболее известные численные методы, применяемые в геомеханике?
2. В чем состоит идея метода конечных элементов?
3. Что такое «матрица жесткости» в МКЭ?

4. Что такое «матрица упругости» в МКЭ?
5. Назовите этапы решения задач геомеханики МКЭ.
6. Каков алгоритм решения упругопластических задач в МКЭ?
7. В чем суть метода граничных элементов?
8. Что такое «сингулярное решение»?
9. Каковы возможности МКЭ и МГЭ? В чем их преимущества и недостатки?
10. В чем суть метода дискретных элементов? Его достоинства и недостатки.